

优秀论文展示 1:

## 北大附中元培项目论文

# 机械发射距离研究 ——限定条件下发射距离变化探究

小组名称：香喷喷的五花肉

小组成员：黄隽楷，陈文韬，田爱灵，张雁博，刘乘旭

选题方向：物理

指导教师：李成名

## **摘要**

本次项目研究了不同水量及不同型号尾翼对水火箭发射距离的影响。首先通过实验收集数据，本次实验采用了 3 种不同水量及 3 种不同型号尾翼。得出数据后进行整理，分析实验误差。再结合网上的论文资料进行理论推导，带入实验数据进行验证，本次项目没有研究不同型号尾翼对水火箭发射距离的影响。最终得出结论：当瓶内初始大气压固定时，瓶中初始水量及瓶体总容积对水火箭射程有影响。

**关键词：**机械发射；水火箭；斜抛运动；实验分析

## **一.研究题目及背景**

**研究题目：**机械发射距离研究——限定条件下发射距离变化探究

## **二.研究目的和意义**

- (1)了解机械发射的原理和方法，小组合作进行理论推导，得出结论。
- (2)锻炼设计实验以及做实验的能力。
- (3)锻炼数学建模及物理理论推导的能力。

## **三.研究方法及研究过程**

### **(1)研究方法**

把实验和理论结合

### **(2)研究过程**

#### **一、实验名称**

限定条件下发射距离变化探究

#### **二、实验器材**

发射器、加压器、量杯、水瓶、刻度尺、不同类型尾翼 3 种

#### **三、实验方案**

##### **(1) 实验变量**

自变量：尾翼型号（共 3 种）、水量（分别为 100mL、200mL、300mL）

因变量：发射距离

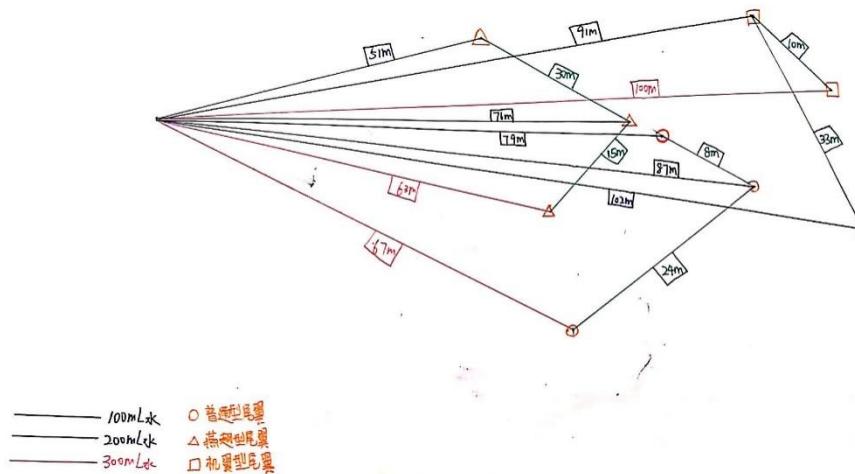
##### **(2) 实验步骤**

- ①调试发射器，使发射角为 50°。
- ②固定相应尾翼。
- ③往水瓶里加入定量的水，并将水瓶安装在发射器上。
- ④加压至 8 个大气压后发射。
- ⑤用手机测距软件测量发射距离。
- ⑥实验器具恢复原位。
- ⑦依次更替尾翼型号和水量，并重复步骤①-⑥，总共重复 9 次。

#### 四、实验数据

尾翼型号	水量/mL	发射距离/m
普通型	100	79
普通型	200	87
普通型	300	67
燕翅型	100	76
燕翅型	200	51
燕翅型	300	63
机翼型	100	91
机翼型	200	102
机翼型	300	100

为使更加真实细致地还原实验，我们用示意图的方式整理了数据。



#### 五、理论推导

##### (1) 水火箭对地速度的推导

设在t时刻，水火箭质量为 $m_1$ ，瓶体的质量为 $m_0$ ，水火箭对地速度为 $u$ ，瓶内液面高为 $h$ ，瓶内空气压强为 $p_1$ ，瓶外大气压为 $p_0$ 。

在 $dt$ 微动内，体积与质量分别为 $dv$ 和 $dm$ 的水喷出，且对地速度为 $v$ ，由此，水火箭速度加大 $du$ 。

由动能定理

$$\frac{1}{2}(m - dm)(u + du)^2 + \frac{1}{2}dmv^2 - \frac{1}{2}mu^2 = dmgh + (p - p_0)dv$$

其中

$$\begin{aligned} dmgh &\ll \frac{1}{2}dmv^2 \\ dmgh &\ll \frac{1}{2}(m-dm)(u+du)^2 \\ dmgh &\ll \frac{1}{2}mu^2 \end{aligned}$$

则可不计 $dmgh$ 有

$$\begin{aligned} (mu^2 + 2mu \cdot du + dm v^2 - dm u^2 - mu^2) + m \cdot du^2 - u dm \cdot du - dm \cdot du^2 \\ = 2(p - p_0)dv \end{aligned}$$

忽略二阶小量

$$2mu \cdot du + dm(v^2 - u^2) = 2(p - p_0)dv \dots\dots \textcircled{1}$$

由计算有：系统内力远大于外力所以不记外力

所以

$$m \cdot u = (m - dm)(u + du) - dm \cdot v$$

忽略二阶小量

$$m \cdot du = dm(u + v) \Rightarrow dm = \frac{m}{u + v} \cdot du$$

代入①式得

$$du = \frac{2(p - p_0)}{pm(u + v)} \cdot dm$$

则

$$du = \frac{2(p - p_0)}{pm \cdot m \cdot \frac{du}{dm}} \cdot dm \Rightarrow du^2 = \frac{2(p - p_0)}{p \cdot m^2} \cdot dm^2$$

有

$$du = \sqrt{\frac{2(p - p_0)}{p}} \cdot \frac{1}{m} \cdot dm$$

故

$$u = \int_M^{m_0} \sqrt{\frac{2(p - p_0)}{\rho}} \cdot \frac{1}{m} \cdot dm \dots\dots \textcircled{2}$$

而由于发射时间短，水喷射过程可记为绝热过程。设瓶容积为 $V_0$ ，初始时瓶内气压为 $P_{\text{气}}$ 。

且任意时刻水的体积为 $kV_0$ ，初始时水的体积为 $k_0 V_0$ ，任意时刻瓶内气体压强为 $p$ 。

由泊松方程

$$P_{\text{气}}(1 - k_0)^{\gamma} V_0^{\gamma} = p[(1 - k)V_0]^{\gamma} \dots\dots \textcircled{3}$$

其中

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{\frac{i}{2}R + R}{\frac{i}{2}R} = \frac{i+2}{i}$$

而水分子为刚性三原子分子，有

$$\gamma = \frac{7}{5}$$

由③式有

$$p = \left( \frac{1 - k_0}{1 - k} \right)^\gamma P_{\text{气}} \dots\dots \textcircled{4}$$

此时p为k的函数。

喷水过程中任意时刻内水的质量

$$kV_0\rho = m - m_0 \dots\dots \textcircled{5}$$

在极小dt时间内喷水质量= dt时间内质量变化量，故

$$dm = \frac{m - m_0}{k_0} \cdot dk$$

代入②式有

$$u = \int_0^{k_0} \sqrt{\frac{2 \left[ p_0 \left( \frac{1 - k_0}{1 - k} \right)^\gamma - pm \right]}{\rho}} \cdot \frac{\rho v_0}{k \rho v_0 + m_0} \cdot dk$$

(2) 对水火箭喷水时间的理论推导

此时设瓶口的截面积为S→喷水体积

$$dV_{\text{水}} = S(u + v) \cdot dt \dots\dots \textcircled{7}$$

由

$$V = V_0 - kV_0$$

可得气体体积变化量为

$$dV = -V_0 dk \dots\dots \textcircled{8}$$

将⑧带入⑦得

$$dt = -\frac{V_0 \cdot dk}{S(u + v)} \dots\dots \textcircled{9}$$

由已知

$$\begin{cases} \frac{1}{2} dm(u + v)^2 = \frac{1}{2} dm^2 \left( \frac{du}{dm} \right)^2 = (p - pm)dV \dots\dots (\text{动能}) \\ dm = \rho dV \dots\dots (\text{质量}) \end{cases}$$

得

$$u + v = \sqrt{\frac{2(p - P_{\text{气}})}{\rho}} \dots\dots \textcircled{10}$$

由⑨式与⑩式得

$$dt = -\frac{v_0 \sqrt{\rho} dk}{S \cdot \sqrt{2(p - p_0)}} = -\frac{v_0}{S} \cdot \sqrt{\frac{\rho}{2 \left[ p_0 \left( \frac{1 - k_0}{1 - k} \right)^{\frac{7}{5}} - p_{\text{气}} \right]}} \cdot dk$$

故

$$t_0 = \frac{v_0}{S} \int_0^{k_0} \sqrt{\frac{\rho}{2 \left[ p_0 \left( \frac{1 - k_0}{1 - k} \right)^{\frac{7}{5}} - p_{\text{气}} \right]}} \cdot dk$$

在喷水过程中水的喷射速度为

$$v_1 = \frac{V_0 k_0}{t_0 \pi (0.5 d_1)^2}$$

其中， $d_1$ 为瓶直径。

经计算，最终可以得到水火箭射程

$$x = 0.5 u t_0 \cos \theta + \frac{u \cos \theta}{g} \sqrt{u^2 \sin^2 \theta + g(u t_0 \sin \theta - g t_0^2)}$$

## 六、数据代入

$k_0$	$u/m \cdot s^{-1}$	$t_0/s$	$x/m$
0.2	37.097	0.00835	157.327
0.4	55.834	0.01928	87.608
0.6	41.519	0.03751	69.346

## 七、实验评估与展望

此次实验中，以三个不同的水量为初始水量所测得的射程的实验误差分别为 3.34%、49.15%、12.5%；

而其中第二个实验误差很大是因为受到了较大的自然条件的影响，所以无参考价值。除第二个之外，实验误差都较小，在可接受范围之内。

在之后，理论方面我们小组希望全面的找到水火箭的影响因素并将其对射程的影响进行量化，以及在运动轨迹的计算方面加入空气阻力的影响；实验方面我们希望能够尽力的缩小误差范围，扩大实验材料类型范围，获得更加广泛、普遍的数据，从而更加精确的验证理论所得到的数据。

## 四.研究结论

- (1) 当瓶内初始大气压固定时，瓶中初始水量对水火箭射程影响较大，且当水量为某一特殊值时，射程可得到最大值。
- (2) 当瓶内初始大气压固定时，瓶体总容积对水火箭射程有影响。

### **3.致谢**

感谢李成名老师和李瀚海老师的指导与帮助，感谢刘鑫老师、柳明老师和周立松老师参加答辩，感谢各位家长的支持，最后感谢为选题付出的同学。